Nombre del estudiante

Grupo Fecha

Método por determinantes para sistemas de 3 × 3

Para los sistemas de 3 × 3 se replica el mismo proceso que para los sistemas de 2 × 2, pero la diferencia es que aquí el cálculo de los determinantes es distinto a como se hizo con las matrices de 2 × 2. Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Primero se organiza la información del sistema en la matriz de coeficientes:

$$A: \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, el sistema tiene solución única *si* $\det(A) \neq 0$.

Para calcular el determinante de una matriz de 3 × 3 utilizaremos la regla de Sarrus que consiste en repetir las dos primeras columnas a la derecha y se suman las tres diagonales principales; luego se restan las tres diagonales secundarias.

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

Determinantes para las incógnitas

Para encontrar los valores de x, y, z, se forman tres determinantes más reemplazando una columna a la vez:

Determinante para $x\,(D_x)$:
Se forma reemplazando la columna de los coeficientes de x por los términos independientes:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinante para $y\,(D_y)$:
Se forma reemplazando la columna de los coeficientes de y por los términos independientes:

$$D_x = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinante para $z\,(D_z)$:
Se forma reemplazando la columna de los coeficientes de z por los términos independientes:

$$D_x = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Finalmente, el cálculo de la solución se da con los cocientes:

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ z = \frac{D_z}{D},$$

Para poner en práctica lo anterior, veamos el siguiente ejemplo:
Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + 3z &= 14 \\ x + 2y + z &= 8 \end{aligned}$$

En primer lugar, calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

Si $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, entonces su determinante es:

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= (1 \cdot -1 \cdot 1) + (1 \cdot 3 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 2) - (1 \cdot -1 \cdot 1) - (1 \cdot 3 \cdot 2) \\ &\quad - (1 \cdot 2 \cdot 1) \\ &= -1 + 3 + 4 + 1 - 6 - 2 = -1 \end{aligned}$$

Como $D \neq 0$, el **sistema tiene solución única**. Procedemos a calcular D_x, D_y y D_z:

$$\begin{aligned} D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 14 & -1 & 3 & 14 & -1 \\ 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} &= (6 \cdot -1 \cdot 1) + (1 \cdot 3 \cdot 8) + (1 \cdot 14 \cdot 2) - (1 \cdot -1 \cdot 8) \\ &\quad - (6 \cdot 3 \cdot 2) - (1 \cdot 14 \cdot 1) \\ &= -6 + 24 + 28 + 8 - 36 - 14 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 14 & 3 & 2 & 14 \\ 1 & 8 & 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} &= (1 \cdot 14 \cdot 1) + (6 \cdot 3 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 8) - (1 \cdot 14 \cdot 1) \\ &\quad - (1 \cdot 3 \cdot 8) - (6 \cdot 2 \cdot 1) \\ &= 14 + 18 + 16 - 14 - 24 - 12 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 14 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= (1 \cdot -1 \cdot 8) + (1 \cdot 14 \cdot 1) + (6 \cdot 2 \cdot 2) - (6 \cdot -1 \cdot 1) \\ &\quad - (1 \cdot 14 \cdot 2) - (1 \cdot 2 \cdot 8) \\ &= -8 + 14 + 24 + 6 - 28 - 16 = -8 \end{aligned}$$

Finalmente, la solución es:

$x = \dfrac{4}{-1} = -4$ $\qquad$ $y = \dfrac{-2}{-1} = 2$ $\qquad$ $z = \dfrac{-8}{-1} = 8$

Consulta el paso a paso para calcular el determinante de una matriz de 3 × 3 por el método de Sarrus en el siguiente enlace:

https://tinyurl.com/coor-pm3-pf3-03

Si no te quedo claro cómo usar el método de Sarrus, puedes consultar otro método para el cálculo del determinante de una matriz de 3 × 3 en el siguiente enlace:

https://tinyurl.com/coor-pm3-pf3-04

Resuelve el siguiente sistema paso a paso por el método de determinantes:

$$
\begin{aligned}
2x - y + 4z &= -4 \\
x + y - 2z &= 5 \\
3x + 2y + z &= 6
\end{aligned}
$$